

Zur Interpretierbarkeit einer Quantentheorie mit indefiniter Metrik*

Von ROLF HÜPER **

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforschg. 17 a, 380—397 [1962]; eingegangen am 8. Dezember 1961)

A special field theoretical model is constructed to study the problem of probability interpretation of a quantum theory with indefinite metric. The model is based on the HEISENBERG dipole-ghost version of the LEE model, but with an additional $V\Theta$ -interaction. This interaction yields bound states in the sector $N+2\Theta$. One gets a situation similar to a case studied by PAULI and KÄLLÉN. It seems that the arising difficulty can be solved only by means of a boundary condition suggested by BOGORIUBOV. However, such a condition excludes the possibility of interpreting our bound states as "physically realizable" states.

Physikalische Zustandsräume mit indefiniter Metrik sind in früheren Arbeiten aus verschiedenen Gründen in Betracht gezogen worden. DIRAC¹ versuchte 1942, das Problem der Bosonenzustände negativer Energie durch Einführung einer indefiniten Metrik zu lösen und dadurch zugleich Konvergenzschwierigkeiten zu beseitigen. PAULI² zeigte, daß sich DIRACs Vorschlag nicht widerspruchsfrei durchführen ließ.

Die gegenwärtig im allgemeinen verwendete Formulierung der Quantenelektrodynamik macht ebenfalls Gebrauch von einer indefiniten Metrik, und zwar nach BLEULER und GUPTA³ bei der Quantisierung der longitudinalen Komponente des elektromagnetischen Vektorpotentials. Auf Grund der LORENTZ-Bedingung wird der Teilraum der erlaubten (physikalisch interpretierbaren) Zustände derart festgelegt, daß dies Verfahren nicht zu sichtbaren Schwierigkeiten führt.

Bekanntlich treten jedoch auch in der heutigen Quantenelektrodynamik Divergenzen auf, von denen man durch KÄLLÉN⁴ weiß, daß sie nicht in der dort angewandten Störungsrechnung begründet sind, sondern in der Struktur der Theorie selbst. Die Renormierungsverfahren, die man zur Beseitigung dieser Divergenzen benutzt, ergeben beim Vergleich mit den Experimenten erstaunlich gute Resultate. Dies ist etwas überraschend, weil es bisher nicht gelungen ist, die (unendlichen!) Renormierungskonstanten in mathematisch konsistenter Weise einzuführen.

Durch Einführung einer indefiniten Metrik in den Zustandsraum versucht HEISENBERG⁵, dieses Problem im Rahmen einer einheitlichen Feldtheorie (Spinortheorie) zu lösen. Die hierbei maßgebenden Überlegungen gehen u. a. davon aus, daß die Ursache der Divergenzen in der Mikrokausalität zu suchen ist. Diese Forderung an eine lorentzinvariante Quantenfeldtheorie mit Wechselwirkung wird im allgemeinen in der folgenden Form gestellt:

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = 0$$

für raumartigen Abstand der beiden Vierervektoren x und y . (Die Operatoren ψ stellen hier Fermionen dar.)

Die Vertauschungsfunktionen erhalten dadurch Singularitäten auf dem Lichtkegel. Nach LEHMANN⁶ sind diese bei definiter Metrik mindestens ebenso stark wie die Singularitäten in den Vertauschungsfunktionen der wechselwirkungsfreien Feldoperatoren und stehen in engem Zusammenhang mit dem (aus der Wechselwirkung folgenden) Massenspektrum der Elementarteilchen: alle zu einem diskreten Energieeigenwert gehörenden Zustände tragen in den Vertauschungsfunktionen je eine δ -Funktion auf dem Lichtkegel bei. Alle diese δ -Funktionen addieren sich mit dem gleichen Vorzeichen, sofern die Metrik im Zustandsraum definit ist. Da andererseits eine Wechselwirkung die Vertauschungsfunktionen gerade dort, wo sie singulär sind, am stärksten modifizieren wird, liegt es nahe, die Möglichkeit von

* Dissertation, Karlsruhe 1961.

** Jetzt: Institut für theoretische Kernphysik der Technischen Hochschule Karlsruhe.

¹ P. A. M. DIRAC, Proc. Phys. Soc., Lond. A **180**, 1 [1942].

² W. PAULI, Rev. Mod. Phys. **15**, 175 [1943].

³ S. N. GUPTA, Proc. Phys. Soc., Lond. A **63**, 681 [1950]; **64**, 850 [1951]. — K. BLEULER, Helv. Phys. Acta **23**, 567

[1950]. — K. BLEULER u. W. HEITLER, Prog. Theor. Phys. **5**, 600 [1950].

⁴ G. KÄLLÉN, Helv. Phys. Acta **25**, 417 [1952].

⁵ H. P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforschg. **14a**, 441 [1959] (enthält Angaben über die früheren Arbeiten zum Spinormodell).

⁶ H. LEHMANN, Nuovo Cim. **11**, 342 [1954].



Zuständen negativer Norm zu betrachten, wenn man eine auf einer Feldgleichung beruhende einheitliche Feldtheorie wie das HEISENBERGSche Spinormodell quantisiert.

Bei Einführung einer indefiniten Metrik stellt sich aber immer die Frage, in welcher Form sich gegebenfalls der Zusammenhang zwischen Norm und Wahrscheinlichkeit, wie man ihn von der Quantenmechanik her kennt, aufrechterhalten läßt. Herrn Dr. P. MITTELSTAEDT verdankt der Verf. den Hinweis darauf, daß die Wahrscheinlichkeitsinterpretation insofern auch in der Quantenmechanik nicht unproblematisch ist, als die betreffenden Größen dort nicht allen KOLMOGOROFFSchen Axiomen genügen, durch die der mathematische Begriff der Wahrscheinlichkeit definiert wird.

Wesentliche allgemeine Untersuchungen über die möglichen mathematischen Strukturen von Theorien mit indefiniter Metrik sind u. a. von NEVANLINNA⁷, LOUHIVAARA⁸, SCHEIBE⁹, SCHLIEDER¹⁰, FERRETTI¹¹, SUDARSHAN¹² und BOPP¹³ durchgeführt worden.

In dieser Arbeit soll nun die Frage der Interpretierbarkeit an einem speziellen physikalischen Modell einer Feldtheorie behandelt werden, das man durch Erweiterung der HEISENBERGSchen Variante¹⁴ des LEE-Modells¹⁵ erhält. Es weist gegenüber dieser Variante zusätzliche diskrete stationäre Zustände auf. An diesem Beispiel läßt sich prüfen, wie weit die bisher für einfachere Fälle aufgestellten Bedingungen für die Interpretierbarkeit noch hinreichen.

Durch die Einführung einer indefiniten Metrik wird übrigens auch erneut der bekannte Zusammenhang zwischen Spin und Statistik zur Diskussion gestellt. Wie SCHEIBE⁹ gezeigt hat, lassen sich lorentz-invariante Theorien mit indefiniter Metrik konstruieren, in denen dieser Zusammenhang umgekehrt ist. Dieser Punkt kann jedoch nicht untersucht werden, da das LEE-Modell in dem Sinne nicht lorentz-invariant ist, als die kinetische Energie der Baryonen – ähnlich wie in DIRACs relativistischer Behandlung des H-Atoms – vernachlässigt wird („statisches Modell“).

§ 1. Das ursprüngliche Lee-Modell

Das LEE-Modell ist so einfach, daß man ohne Benutzung der Störungstheorie die Masse und die Kopplungskonstante renormieren und die niedrigsten Zustände berechnen kann. Andererseits treten hier schon Schwierigkeiten auf, die auch für realistischere Theorien kennzeichnend sind. Die Schlüsse, die man aus dem Modell zieht, sind also möglicherweise von allgemeiner Bedeutung.

Es werden drei Arten von Teilchen angenommen, zwischen denen nur folgende Übergänge möglich sind:

$$V \rightleftharpoons N + \Theta.$$

Der HAMILTON-Operator hat die Form

$$H = H_0 + H_1,$$

wobei (im Impulsraum)

$$H_0 = m_V \psi_V^* \psi_V + m_N \psi_N^* \psi_N + \int d\mathbf{k} \omega(k) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (1)$$

und

$$H_1 = - \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{f(\omega)}{\sqrt{2\omega}} [\psi_V^* \psi_N a(\mathbf{k}) + a^*(\mathbf{k}) \psi_N^* \psi_V] d\mathbf{k}.$$

$\omega(k) \equiv \sqrt{m\omega^2 + k^2}$ ist die Energie eines Θ -Teilchens, für die wegen der Analogie zum π -Meson der relativistische Ansatz gemacht wird. Die kinetische Energie der V- und N-Teilchen dagegen wird vernachlässigt; man denkt sich also diese Teilchen an einem bestimmten Ort ruhend.

Wie in früheren Arbeiten¹⁴ wird $m_N = 0$ gesetzt, da eine Änderung dieser Größe hier nur eine Verschiebung des Nullpunktes der Energieskala bewirkt.

Die Funktion $f(\omega)$ ist ein „Formfaktor“, für den zunächst angenommen wird

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega < \hat{\omega}, \\ 0 & \text{für } \omega > \hat{\omega}. \end{cases} \quad (2)$$

In dieser Arbeit interessiert nachher nur der Grenzfall $\hat{\omega} \rightarrow 0$.

⁷ R. NEVANLINNA, Ann. Sci. Fenniae A I 108, 113, 115 [1952], 163 [1954], 222 [1956].

⁸ I. S. LOUHIVAARA, Ann. Sci. Fenniae A I 252 [1958].
⁹ E. SCHEIBE, Ann. Sci. Fenniae A I 294 [1960] und Vorabdruck: Über Feldtheorien in Zustandsräumen mit indefiniter Metrik.

¹⁰ S. SCHLIEDER, Z. Naturforschg. 15a, 448, 555 [1960].

¹¹ B. FERRETTI, Nuovo Cim. 12, 393 [1959].

¹² E. C. G. SUDARSHAN, Phys. Rev. 123, 2183 [1961].

¹³ F. BOPP, Vorabdruck. — K. L. NAGY, Nuovo Cim. Suppl. 17, Serie X, 92 [1960] gibt eine ausführliche Literaturübersicht der Einzeluntersuchungen über Fragen der indefiniten Metrik.

¹⁴ W. HEISENBERG, Nucl. Phys. 4, 532 [1957].

¹⁵ T. D. LEE, Phys. Rev. 95, 1329 [1954].

Die Vertauschungsrelationen der (nicht-renormierten) Operatoren lauten

$$\{\psi_V, \psi_V^*\} = 1, \quad (3a)$$

$$\{\psi_N, \psi_N^*\} = 1, \quad (3b)$$

$$[a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3c)$$

Später wird infolge der einzuführenden indefiniten Metrik [Gl. (8) statt (3 a)] die Vertauschungsrelation¹⁴

$$\{\psi_V, \psi_V^*\} = -1$$

sowie eine Abänderung des Wechselwirkungs-Operators H_1 in

$$H_1 = -\frac{g_0}{V^4 \pi} \int \frac{f(\omega)}{\sqrt{2\omega}} [\psi_V^* \psi_N a(\mathbf{k}) - a^*(\mathbf{k}) \psi_N^* \psi_V] d\mathbf{k}$$

erforderlich. An den Gln. (4) ff. ändert sich dadurch nichts. Es gilt

$$[H_0, n_V] = [H_0, n_N] = [H_0, n_\theta] = 0, \quad (4)$$

aber $[H_1, n_V] \neq 0$ usw.,

wobei

$$n_V = \psi_V^* \psi_V; \quad n_N = \psi_N^* \psi_N; \quad n_\theta = \int a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Die durch bestimmte Zahlen von „freien“ V-, N- und Θ -Teilchen charakterisierten Zustände sind also Eigenzustände zu H_0 , aber im allgemeinen nicht zu $H_0 + H_1$. Ausnahmen: das „Vakuum“ $|0\rangle$, sowie die Zustände

$$a^*(\mathbf{k}_1) \cdot \dots \cdot a^*(\mathbf{k}_n) |0\rangle \quad \text{und} \quad \psi_N^* |0\rangle.$$

Erhaltungssätze gelten für die Teilchenzahlen

$$n_1 = n_V + n_N \quad \text{und} \quad n_2 = n_V + n_\theta,$$

$$\text{denn} \quad [H_0 + H_1, n_1] = [H_0 + H_1, n_2] = 0. \quad (5)$$

Der Zustandsraum zerfällt also in Unterräume (Sektoren), die durch die Quantenzahlen n_1 und n_2 gekennzeichnet sind und zwischen denen es keine Übergänge gibt. Insbesondere kann ein V-Teilchen nur ein Θ -Teilchen emittieren, nicht beliebig viele. Ein N-Teilchen kann kein Θ -Teilchen emittieren. Damit ist die Kreuzungs-(“crossing”)Symmetrie zerstört, die in realistischeren Theorien für starke Wechselwirkungen gilt¹⁶. Infolge dieser starken Vereinfachungen wird das Modell mathematisch durchsichtiger als die bekannten Feldtheorien der Elementarteilchen.

¹⁶ S. GASIOROVICZ, Fortschr. Phys. **8**, 665 [1960]. — V. D. KUKIN u. A. R. FRENKIN, Sov. Phys. Dokl. **5**, 698 [1961].

Der einfachste nicht-triviale Sektor hat die Quantenzahlen $n_1 = n_2 = 1$, entspricht also dem Fall $V \rightleftharpoons N + \Theta$. Die hierzu gehörenden Zustände haben die Form

$$|E\rangle = [c \psi_V^* + \psi_N^* \int \varphi(k) a^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k}] |0\rangle. \quad (6)$$

Die Größen c und $\varphi(k)$ lassen sich durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$(H_0 + H_1) |E\rangle = E |E\rangle \quad \text{bestimmen.}$$

Wegen der Orthogonalität der Vektoren $\psi_V^* |0\rangle$ und $\psi_N^* a^*(\mathbf{k}) |0\rangle$ führt ein Koeffizientenvergleich zu dem Gleichungssystem

$$(E - m_V) c = - (g_0 / \sqrt{4\pi}) \int d\mathbf{k} [\varphi(k) / \sqrt{2\omega}],$$

$$(E - \omega) \varphi(k) = - (g_0 / \sqrt{4\pi}) (c / \sqrt{2\omega}).$$

Als Eigenwertbedingung für gebundene Zustände ($E < m_\Theta$) erhält man daraus

$$h(E) \equiv a + b E + E^2 G(E) = 0. \quad (7)$$

Die Funktion $G(E) \equiv \frac{1}{2} \int_{m_\Theta}^{\hat{\omega}} k d\omega / [\omega^2 (\omega - E)]$ ist für $\hat{\omega} \rightarrow \infty$ konvergent. Ferner ist

$$a = - (m_V / g_0^2) + \int_{m_\Theta}^{\hat{\omega}} \frac{1}{2} (k/\omega) d\omega$$

$$\text{und} \quad b = (1 / g_0^2) + \int_{m_\Theta}^{\hat{\omega}} \frac{1}{2} (k/\omega^2) d\omega.$$

Das erste Integral divergiert linear und das zweite logarithmisch für $\hat{\omega} \rightarrow \infty$. Die Parameter a und b bleiben endlich, wenn man renormiert, d. h. hier die Größen g_0 und m_V als prinzipiell unbeobachtbar behandelt und sie so festlegt, daß sie die Integrale bis auf endliche Teile kompensieren. Das bedeutet aber bei hinreichend großem $\hat{\omega}$, daß

$$g_0^2 < 0$$

wird. H_1 ist dann nicht mehr hermitesch, sofern man an einer definiten Metrik im Zustandsraum festhält.

Führt man dagegen nach PAULI und KÄLLÉN¹⁷ eine Metrik im Zustandsraum ein, die in der Belegungszahl-Darstellung der freien Teilchen die Form hat

$$\langle n_V n_N n_\theta | n'_V n'_N n'_\theta \rangle \quad (8)$$

$$= \delta \langle n_V n'_V \rangle \delta \langle n_N n'_N \rangle \delta \langle n_\theta n'_\theta \rangle (-1)^{n_V},$$

¹⁷ G. KÄLLÉN u. W. PAULI, Dan. Mat. Fys. Medd. **30**, Nr. 7 [1955].

also eine indefinit Metrik, so wird in ihr der HAMILTON-Operator pseudo-hermitesch sein. Damit ist sichergestellt, daß der Erwartungswert der Energie eines Zustandes immer reell ist, wenn nicht dessen Norm verschwindet.

Die Streuzustände innerhalb des Sektors

$$N + \Theta \not\supseteq V$$

lassen sich exakt berechnen, die zugehörige S -Matrix ist unitär.

Die gebundenen Zustände dieses Sektors ergeben sich aus den Nullstellen der Funktion $h(E)$. Diese Funktion hat für genügend großes $\hat{\omega}$ in dem Bereich $-\infty < E \leq m_\theta$ folgende Eigenschaften:

$$\frac{dh}{dE} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } E \rightarrow m_\theta \\ -\infty & \text{für } E \rightarrow -\infty \end{cases} \quad \text{und} \quad \frac{d^2h}{dE^2} > 0. \quad (9)$$

Sie hat zwei Nullstellen, wobei man drei mögliche Fälle zu unterscheiden hat:

- (I) reell, verschieden;
- (II) reell, zusammenfallend (Dipol-Fall);
- (III) konjugiert-komplex.

Welche dieser drei Möglichkeiten vorliegt, hängt von der Festlegung der Parameter g_0 und m_θ bzw. a und b im HAMILTON-Operator, also von der Renormierung, ab. Im Falle (I) hat der gebundene Zustand $|\Phi_+\rangle$ mit der höheren Energie E_+ positive Norm und der Zustand $|\Phi_-\rangle$ mit der (niedrigeren) Energie E_- negative Norm.

Fallen dagegen die beiden Nullstellen zusammen (II), so werden die entsprechenden Zustände miteinander identisch, statt daß wie in einer Theorie mit definiter Metrik eine Entartung entsteht. Die Norm des so gebildeten Zustandes $|\Phi_0\rangle$ verschwindet. Zur Vervollständigung des HILBERT-Raumes braucht man nach HEISENBERG¹⁴ nun einen weiteren Zustandsvektor $|\Phi_D\rangle$, der sich ebenfalls auf Null normieren läßt. Er ist kein Eigenvektor zum HAMILTON-Operator, sondern ergibt sich aus der Gleichung

$$H|\Phi_D\rangle = E|\Phi_D\rangle + C|\Phi_0\rangle. \quad (10)$$

Er ist orthogonal zu allen Zuständen mit Ausnahme von $|\Phi_0\rangle$.

Im Falle (III) verschwindet die Norm der Zustände, da die Energieeigenwerte nicht reell sind.

Zustände verschwindender Norm kann man auch im Falle (I) konstruieren, wenn man von $|\Phi_+\rangle$ und

$|\Phi_-\rangle$ auf eine neue Basis übergeht:

$$\begin{aligned} |\Phi_D\rangle &= (1/\sqrt{2})(|\Phi_+\rangle + |\Phi_-\rangle) \\ |\Phi_0\rangle &= (1/\sqrt{2})(|\Phi_+\rangle - |\Phi_-\rangle) \end{aligned} \quad (11)$$

mit $\langle\Phi_\pm|\Phi_\pm\rangle = \pm 1$,
 $\langle\Phi_\pm|\Phi_\mp\rangle = 0$.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \langle\Phi_D|\Phi_D\rangle &= \langle\Phi_0|\Phi_0\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle\Phi_+|\Phi_+\rangle + \langle\Phi_-|\Phi_-\rangle) = 0 \end{aligned}$$

und $\langle\Phi_0|\Phi_D\rangle = \frac{1}{2}(\langle\Phi_+|\Phi_+\rangle - \langle\Phi_-|\Phi_-\rangle) = 1$.

Hier sind alle Skalarprodukte im Sinne der indefiniten Metrik aufzufassen. Umgekehrt kann man im Fall (II) Zustände negativer Norm durch Überlagerung von $|\Phi_0\rangle$ und $|\Phi_D\rangle$ erhalten.

§ 2. Auswirkungen der Metrik auf die physikalische Interpretation

Die Streuung eines Θ -Teilchens an einem N -Teilchen ($E > m_\theta$) bereitet keine neuen Probleme, da es sich um elastische Streuung handelt und in der Endkonfiguration kein Zustand mit negativer Norm auftreten kann.

Streut man dagegen mehrere Θ -Teilchen an einem N -Teilchen, so können im Falle (I) in der Endkonfiguration gebundene Zustände des Sektors $N + \Theta \not\supseteq V$ vorkommen. Das sieht man zum Beispiel, wenn man die SCHRÖDINGER-Gleichung für Zustände des Sektors $N + 2\Theta$ ($n_1 = 1; n_2 = 2$) aufstellt, für die man ansetzen muß

$$\begin{aligned} |E\rangle &= \left[\int \varphi_1(\mathbf{k}_1) \psi_V^* a^*(\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1 \right. \\ &\quad \left. + \int \varphi_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \psi_N^* a^*(\mathbf{k}_1) a^*(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung liefert dann für $\varphi_1(\mathbf{k}_1)$ und $\varphi_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ ein Gleichungssystem, aus dem man nach Elimination von $\varphi_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ folgende Gleichung erhält:

$$\begin{aligned} h(E - \omega_1) \varphi_1(\mathbf{k}_1) &= -\frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{k}_2 \frac{\varphi_1(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2 - E - i\gamma)}} + \varphi_{0i}(\mathbf{k}_1). \\ & \quad (\gamma \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (13)$$

Der inhomogene Teil $\varphi_{0i}(\mathbf{k}_1)$ stammt von den einlaufenden Θ -Teilchen und verschwindet daher, wenn $E < 2m_\theta$ ist:

$$\varphi_{0i}(\mathbf{k}_1) = \frac{2}{g_0 V^4 \pi} \int d\mathbf{k}_2 \frac{\varphi_0(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega_2}}, \quad (14)$$

wobei

$$\varphi_0(k_1, k_2) \sim \delta(E - \omega_1 - \omega_2) \quad \text{und} \quad \omega_i = \sqrt{m\theta^2 + k_i^2}.$$

Drückt man die Größen a und b durch die zwei Nullstellen E_+ und E_- der Funktion $h(z)$ aus, so erhält diese die Form

$$h(z) = \frac{1}{2}(z - E_+)(z - E_-) F(z); \quad (15)$$

$$F(z) = \int_{m\theta}^{\infty} \frac{k \, d\omega}{[(\omega - E_+)(\omega - E_-)(\omega - z - i\gamma)]} \quad (\gamma \rightarrow 0).$$

Demnach wird die Funktion $\varphi_1(k)$ im allgemeinen Pole haben, wenn

$$E - \omega = E_+ \quad \text{und} \quad E - \omega = E_-;$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(k) &= \alpha_+ \delta(\omega - \omega_+) + \alpha_- \delta(\omega - \omega_-) \\ &+ \frac{\psi(k)}{[(\omega - \omega_+ - i\gamma)(\omega - \omega_- - i\gamma)]}; \\ \omega_{\pm} &= E - E_{\pm} \quad (\gamma \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (16)$$

(Aus der Integralgleichung ist zu ersehen, daß man $\varphi_1(k)$ als kugelsymmetrisch ansetzen kann, so daß sich alle Winkelintegrationen sofort durchführen lassen. Bei der Integration über k ist in (15) und (16) der Integrationsweg entsprechend der Randbedingung für auslaufende Streuwellen zu wählen¹⁸.)

Die Pole in dem Ausdruck (16) für $\varphi_1(k)$ entsprechen Übergängen in Zustände, die $|\Phi_+\rangle$ bzw. $|\Phi_-\rangle$ enthalten. Infolge der negativen Norm des Zustandes $|\Phi_-\rangle$ treten nun aber Schwierigkeiten auf. Zwar ist nach KÄLLÉN und PAULI¹⁷ die S -Matrix pseudo-unitär in bezug auf den *gesamten* Zustandsraum, sie läßt also Skalarprodukte und damit insbesondere die Norm invariant:

$$S S^+ = S^+ S = 1. \quad (17)$$

Da die Norm aber negativ sein kann, ist sie nicht mehr als Wahrscheinlichkeit interpretierbar. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß man in der Endkonfiguration Zustände mit positiver Norm vorfindet, wird im allgemeinen größer sein als Eins.

An einem einfachen Beispiel läßt sich die wesentliche Abbildungseigenschaft der S -Matrix demonstrieren¹⁹:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

¹⁸ W. HEISENBERG, Z. Phys. **120**, 513 [1943].

¹⁹ N. N. BOGOLJUBOW, B. M. MEDWEDEW u. M. K. POLIWANOW, Verein. Inst. f. Kernf. Dubna, Report P 176, P 180 [1958].

Hier bedeutet a den Anfangszustand und b den Endzustand, wobei a_3 und b_3 die Komponenten in dem Teilraume mit negativer Norm seien:

$$\begin{aligned} \langle a | a \rangle &= |a_1|^2 + |a_2|^2 - |a_3|^2, \\ \langle b | b \rangle &= |b_1|^2 + |b_2|^2 - |b_3|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Ist nun $\langle a | a \rangle = 1$, so auch $\langle b | b \rangle = 1$, wegen der Pseudo-Unitarität [Gl. (17)]. Daher gilt für $a_3 \neq 0$ und $b_3 \neq 0$

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 > 1 \quad \text{und} \quad |b_1|^2 + |b_2|^2 > 1. \quad (20)$$

Bisher hat sich kein Weg gezeigt, der eine unmittelbare physikalische Interpretation der Zustände negativer Norm erlaubt. Wählt man aber im Anfangszustand des erwähnten Beispiels $a_3 = 0$, so wird im allgemeinen doch $b_3 \neq 0$ sein, sofern nicht die S -Matrix in bezug auf die beiden Teilräume reduzibel ist. Im Beispiel des LEE-Modell es ist sie es nicht, wie KÄLLÉN und PAULI¹⁷ gezeigt haben.

Es ist daher eine Vorschrift nötig, die jedem Vektor des physikalischen Teilraumes einen Vektor des Gesamtraumes zuordnet, und zwar derart, daß die physikalischen Bildvektoren des Anfangs- und des Endzustandes die gleiche Norm haben. Die Zuordnungsvorschrift wird also entscheidend von der S -Matrix im Gesamtraume abhängen, da sie dort jeweils den Anfangs- und den Endzustand miteinander verbindet.

Nimmt man die Zuordnung vor, indem man jeden gegebenen physikalischen Teilvektor durch Addition eines geeigneten „unphysikalischen“ Teilvektors ergänzt, so läuft dies auf die Formulierung von speziellen Rand- bzw. Anfangsbedingungen im Gesamtraum hinaus, denn nicht jedem Vektor des Gesamtraumes wird ein physikalischer Vektor zugeordnet sein.

Bei ungleichen reellen Nullstellen von $h(E)$ liegt es nahe, den Zustand $|\Phi_+\rangle$ als physikalisch und $|\Phi_-\rangle$ als unphysikalisch anzusehen. Man muß dann bei Streuungen im Sektor $N + 2\Theta$ die zu $|\Phi_-\rangle$ gehörige Amplitude der Anfangskonfiguration so wählen, daß ihr Betrag gleich demjenigen der entsprechenden Amplitude in der Endkonfiguration ist. In dem Beispiel oben würde das heißen, daß

$$|a_3| = |b_3|,$$

— L. A. MAXIMOW, J. Exp. Theor. Phys. USSR **36** (9), 97, 324 [1959].

so daß dann gilt

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2. \quad (21)$$

Ein Vorschlag dieser Art ist von BOGOLJUBOW und Mitarbeitern¹⁹ gemacht worden, in Abwandlung des Weges, den HEISENBERG für das LEE-Modell beschritten hatte¹⁴.

Im Sektor $N + 2\Theta$ dieses Modells hat man dem-

nach folgende Randbedingungen. Ist α_{\pm} die Amplitude der einlaufenden Welle, die der Streuung eines Θ -Teilchens an einem \varPhi_{\pm} -System entspricht, und ist α_+ willkürlich vorgegeben, so wird α_- durch die Forderung festgelegt, daß die Funktion $\varphi_1(k)$ keinen Pol haben soll, wenn $\omega = \omega_-$ ist. An dieser Stelle soll also die rechte Seite der Integralgleichung (13) und damit die Funktion $\psi(k)$ verschwinden.

Hierdurch bekommt $\varphi_1(k)$ die Form

$$\varphi_1(k) = \alpha_+ \delta(\omega - \omega_+) + \alpha_- \delta(\omega - \omega_-) + \chi(k) / (\omega - \omega_+ - i\gamma), \quad (16')$$

wobei $\chi(k)$ regulär ist für $k = k_-$. Die Bedingung für α_- ergibt sich aus der Integralgleichung (13):

$$\varphi_1(k_1) (\omega_1 - \omega_+) (\omega_1 - \omega_-) F(E - \omega_1) = -\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{k}_2 \cdot \varphi_1(k_2) / [\sqrt{\omega_1 \omega_2} (\omega_1 + \omega_2 - E - i\gamma)] + \varphi_{0i}(k_1), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(k_1) (\omega_1 - \omega_+) (\omega_1 - \omega_-) \Big|_{\omega_1 = \omega_-} &= \int_{m_{\Theta}}^{\infty} K(\omega_1, \omega_2) \varphi_1(k_2) d\omega_2 \Big|_{\omega_1 = \omega_-} + \varphi_{0i}(k_1) / [F(E - \omega_1)] \Big|_{\omega_1 = \omega_-} \quad (23) \\ 0 &= \int_{m_{\Theta}}^{\infty} d\omega_2 K(\omega_-, \omega_2) \{ \alpha_+ \delta(\omega_2 - \omega_+) + \alpha_- \delta(\omega_2 - \omega_-) \\ &\quad + \chi(k_2) / [\omega_2 - \omega_+ - i\gamma] \}, \end{aligned}$$

wobei

$$K(\omega_1, \omega_2) = -k_2 \sqrt{\omega_2} / [\sqrt{\omega_1} (\omega_1 + \omega_2 - E) F(E - \omega_1)]. \quad (24)$$

$$\text{Wegen } E - \omega_- = E_- < m_{\Theta} \text{ ist nämlich } \varphi_{0i}(k_-) \sim \int_{m_{\Theta}}^{\infty} \frac{k_2 \omega_2 d\omega_2}{\sqrt{2} \omega_2} \delta(E - \omega_- - \omega_2) = 0. \quad (25)$$

Aus Gl. (23) folgt

$$\alpha_- K(\omega_-, \omega_-) = -\alpha_+ K(\omega_-, \omega_+) \theta(\omega_+ - m_{\Theta}) - \int_{m_{\Theta}}^{\infty} d\omega_2 K(\omega_-, \omega_2) \cdot \chi(k_2) / [\omega_2 - \omega_+ - i\gamma], \quad (26)$$

wo

$$\theta(x) = (x + |x|) / 2|x|.$$

Setzt man diese Bedingung in den Ausdruck (16') ein, so erhält man aus Gl. (22) für $\chi(k)$ die Integralgleichung (es ist $\omega_- > \omega_+$):

$$\begin{aligned} (\omega_1 - \omega_-) \chi(k_1) &= \alpha_+ K(\omega_1, \omega_+) \theta(\omega_+ - m_{\Theta}) - \frac{K(\omega_1, \omega_-)}{K(\omega_-, \omega_-)} \left\{ \alpha_+ K(\omega_-, \omega_+) \theta(\omega_+ - m_{\Theta}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{m_{\Theta}}^{\infty} d\omega_2 K(\omega_-, \omega_2) \frac{\chi(k_2)}{\omega_2 - \omega_+ - i\gamma} \right\} + \int_{m_{\Theta}}^{\infty} d\omega_2 K(\omega_1, \omega_2) \frac{\chi(k_2)}{\omega_2 - \omega_+ - i\gamma} \\ &= \alpha_+ \left[K(\omega_1, \omega_+) - \frac{K(\omega_1, \omega_-) K(\omega_-, \omega_+)}{K(\omega_-, \omega_-)} \right] \theta(\omega_+ - m_{\Theta}) \\ &\quad + \int_{m_{\Theta}}^{\infty} d\omega_2 \frac{\chi(k_2)}{\omega_2 - \omega_+ - i\gamma} \left[K(\omega_1, \omega_2) - \frac{K(\omega_-, \omega_2) K(\omega_1, \omega_-)}{K(\omega_-, \omega_-)} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet für $\omega_1 = \omega_-$, $\chi(k_1)$ hat hier also keinen Pol mehr. Die einlaufende Welle wird nicht gestreut.

Die bisherigen Überlegungen bezogen sich auf den Fall, in dem E_+ und E_- reell und verschieden sind. Der „Dipolfall“ ($E_+ = E_-$) steht in engerer Beziehung zum HEISENBERGSchen Spinormodell und soll daher ausführlich behandelt werden. Für ihn ist nach Gl. (15)

$$h(z) = \frac{1}{2} (z - E_0)^2 F_0(z),$$

wo $F_0(z) = \int_{m_\Theta}^{\infty} \frac{k \, d\omega}{(\omega - E_0)^2 (\omega - z)}.$ (15')

Die Randbedingungen für den Sektor $N+2\Theta$ müssen hier so festgelegt werden, daß die Funktion $\varphi_1(k)$ nicht infolge der Integralgl. (22) einen Doppelpol im Impulsraum bekommt, denn eine solche Funktion hätte im Ortsraum nicht ein Verhalten wie e^{ikr}/kr und wäre schon deshalb nicht als Streuzustand interpretierbar.

Der Doppelpol kann durch Zusammenfallen der beiden Pole in Gl. (22) entstehen. Die BOGOLJUBOWSchen Randbedingungen, durch die einer der Pole beseitigt wird, gehen für $E_\pm \rightarrow E_0$ in die von HEISENBERG für den Dipolfall gestellte Forderung über:

$$\begin{aligned} \varphi_1(k) &= \alpha_+ \delta(\omega - \omega_+) + \alpha_- \delta(\omega - \omega_-) \\ &+ \chi(k)/[\omega - \omega_+ - i\gamma] \quad (16'') \\ &\Rightarrow \alpha \delta(\omega - \omega_c) + \chi(k)/[\omega - \omega_c - i\gamma], \end{aligned}$$

wobei $\alpha = \alpha_+ + \alpha_-$ und $\omega_c = E - E_0.$

Die Amplitude α des am Φ_0 -System gestreuten Θ -Teilchens ist dann festgelegt durch die Randbedingung

$$\alpha = -\frac{1}{K(\omega_c, \omega_c)} \int_{m_\Theta}^{\infty} d\omega_2 K(\omega_c, \omega_2) \frac{\chi(k_2)}{\omega_2 - \omega_c - i\gamma}. \quad (26')$$

Bis hierher erscheinen die von HEISENBERG und die von BOGOLJUBOW untersuchten Fälle noch analog zueinander. Es bestehen zwischen ihnen aber wesentliche Unterschiede.

Bei BOGOLJUBOW ist jeder Vektor mit positiver Norm von unmittelbarer physikalischer Bedeutung. Jedem solchen Vektor wird ein Vektor des gesamten Zustandsraumes zugeordnet nach der Vorschrift: Die Amplituden der unphysikalischen ein- und auslaufenden Wellen sollen gleich sein, so daß die Norm im physikalischen Unterraum erhalten bleibt.

HEISENBERG dagegen geht im Sektor $N+2\Theta$ nicht von zwei Vektoren $|\Phi_+\rangle$ und $|\Phi_-\rangle$ entgegengesetzter Norm aus, sondern von einer Basis mit den zwei

Nullvektoren $|\Phi_0\rangle$ und $|\Phi_D\rangle.$ Unmittelbare physikalische Bedeutung wird nur den übrigen Vektoren positiver Norm gegeben. Jedem von diesen wird nun nicht etwa ein Vektor des – indefiniten – Gesamttraumes zugeordnet, sondern eines Raumes mit semi-definiter Metrik, des sogen. HILBERT-Raumes I. Er enthält nur Zustandsvektoren, in denen zwar $|\Phi_0\rangle$, aber nicht $|\Phi_D\rangle$ asymptotisch auftreten kann. Die Vorschrift für die Amplitude der einlaufenden zu $|\Phi_0\rangle$ gehörenden Θ -Welle lautete hier: Es darf im Impulsraum kein Doppelpol auftreten. Der dann noch bleibende einfache Pol bedeutet, daß diese Welle gestreut wird, sie läuft mit einer im allgemeinen veränderten Amplitude aus.

Durch die HEISENBERGSche Bedingung wird erreicht, daß die S -Matrix den HILBERT-Raum I invariant läßt, d. h. es finden keine Übergänge von physikalischen Zuständen in $|\Phi_D\rangle$ statt. In der Darstellung, die der von HEISENBERG gewählten Basis entspricht, sieht die Abbildung durch die S -Matrix im Gesamtraum demnach schematisch folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ 0 & 0 & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei für die Normen gilt:

$$\langle a | a \rangle = \langle b | b \rangle = |a_1|^2 + 0 = |b_1|^2 + 0.$$

Wie bei BOGOLJUBOW, so bleibt also auch hier die Norm der „physikalischen“ Komponente des Zustandsvektors erhalten. (Isometrie der S -Matrix im „physikalischen“ Unterraum.) Darüber hinaus ist aber bei HEISENBERG die S -Matrix innerhalb dieses Unterraumes auch unitär, da sie ihn invariant läßt.

Weder die Methode von HEISENBERG noch diejenige von BOGOLJUBOW verstoßen gegen die Erhaltungssätze von Energie und Impuls innerhalb dieses Unterraumes. Die „ Φ -Wellen“ von BOGOLJUBOW transportieren zwar Energie und Impuls, übertragen sie aber nicht, da sich ihre Amplitude nicht ändert. HEISENBERGS „ Φ_0 -Wellen“ dagegen transportieren weder Energie noch Impuls, da $|\Phi_0\rangle$ Nullvektor ist. Daher ist es hier unwichtig, daß sich die Amplitude der „ Φ_0 -Welle“ bei der Streuung ändert.

Die aufgezeigten Wege lösen die Frage der Unitarität der S -Matrix im Sektor $N+2\Theta$ des LEE-Modell. Dabei ist es allerdings noch nicht völlig geklärt, wie man die Randbedingungen erfüllen kann, ohne gegen die Forderung der Kausalität zu verstößen. Diese bereitet schon dann Schwierigkei-

ten, wenn man sie in der schwachen Form^{20, 21}

$$\tilde{S}(A+B) \rightarrow \tilde{S}(A) \tilde{S}(B)$$

stellt. Sie besagt: Für die Streuung eines Teilchens an zwei Zentren A und B ist zu verlangen, daß die S-Matrix mit wachsendem Abstand dieser Zentren voneinander in das Produkt derjenigen S-Matrizen übergeht, die der Streuung an jedem Zentrum für sich entsprechen. Die Tilde bedeutet, daß sich die Forderung nicht nur auf die S-Matrizen des gesamten Zustandsraumes bezieht, sondern auch auf diejenigen unitären Matrizen S , die nach Erfüllung der erwähnten Randbedingungen den physikalischen Teilraum auf sich abbilden.

§ 3. Diskrete stationäre Zustände des Sektors $N+2\Theta$

Der HEISENBERGSche Weg läßt sich sinngemäß auf die höheren Sektoren $N+z\Theta$ ($n_1=1$, $n_2=z>1$) des LEE-Modells übertragen¹⁴. Die Randbedingungen sorgen dann dafür, daß Übergänge in den Zustand $|\Phi_D\rangle$ nicht auftreten können. Der hierzu geführte Beweis ist aber nur gültig, sofern es keine weiteren gebundenen Zustände in diesen Sektoren gibt²². Tatsächlich existieren nach HEISENBERG im Dipolfall (II) keine diskreten Lösungen außer $|\Phi_0\rangle$ und $|\Phi_D\rangle$.

Daher stellt sich die Frage, ob sich auch dann noch hinreichende Bedingungen formulieren lassen, wenn man ein allgemeineres Modell hat, das gebundene Zustände eventuell mit negativer Norm aufweist. Ein solches, dem „Dipolfall“ entsprechendes Modell soll nun konstruiert werden.

Dies läßt sich durch Erweiterung des LEE-Modells durchführen. Der Einfachheit halber soll es derart abgeändert werden, daß die Einteilung des Zustandsraumes in Sektoren bestehen bleibt, also nach wie vor die zu n_1 und n_2 gehörigen Operatoren mit dem HAMILTON-Operator kommutieren. Ferner soll sich am Eigenwertproblem des Sektors $n_1=n_2=1$ nichts ändern. Diese Bedingung erfüllt z. B. ein HAMILTON-Operator

$$H = H_0 + H_1 + H_2, \quad \text{wobei} \quad (28)$$

$$H_2 = \frac{g_2}{4\pi} g_0^2 \int V(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \psi_V^* \psi_V a^*(\mathbf{q}') a(\mathbf{q}) d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \quad (28')$$

eine Wechselwirkung zwischen V- und Θ -Teilchen bedeutet, bei der die Zahl dieser Teilchen nicht verändert wird. Die Größe g_2 ist eine Kopplungskonstante. Der Faktor g_0^2 muß hinzugesetzt werden, damit die Operator-Feldgleichungen renormierbar bleiben.

Für jeden Zustand

$$|\psi\rangle = [c \psi_V^* + \int \varphi(k) \psi_N^* a^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k}] |0\rangle$$

des Sektors $N+\Theta$ gilt

$$H_2 |\psi\rangle = 0. \quad (29)$$

Die Eigenzustände von $H_0 + H_1 + H_2$ und $H_0 + H_1$ sind in diesem Sektor also gleich.

Für den Sektor $N+2\Theta$ ist wie früher anzusetzen

$$|E_s\rangle = [\psi_V^* \int \varphi_1(\mathbf{k}_1) a^*(\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1 + \psi_N^* \int \varphi_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) a^*(\mathbf{k}_1) a^*(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1] |0\rangle. \quad (12')$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$(H_0 + H_1 + H_2) |E_s\rangle = E_s |E_s\rangle$$

ergibt dann die Integralgleichungen

$$(E_s - m_V - \omega_1) \varphi_1(\mathbf{k}_1) = - \frac{2g_0}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\sqrt{2\omega_2}} \varphi_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + \frac{g_2}{4\pi} g_0^2 \int V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \varphi_1(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_2 \quad (30)$$

und

$$(E_s - \omega_1 - \omega_2) \varphi_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = - \frac{g_0}{2\sqrt{4\pi}} \left[\frac{\varphi_1(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega_2}} + \frac{\varphi_1(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega_1}} \right]. \quad (30')$$

Wie beim ursprünglichen LEE-Modell kann man also die zweite Gleichung nach φ_2 auflösen, unter Beachtung der Randbedingungen für die zwei ein- bzw. auslaufenden Θ -Teilchen. Man erhält dann für φ_1 allein eine Integralgleichung, nachdem man noch Gl. (30) durch g_0^2 dividiert und die Renormierung wie früher durchgeführt hat:

$$h(E_s - \omega_1) \varphi_1(\mathbf{k}_1) = - \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \frac{\varphi_1(\mathbf{k}_2)}{\omega_1 + \omega_2 - E_s} + \frac{g_2}{4\pi} \int V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \varphi_1(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_2 + \varphi_{0i}(\mathbf{k}_1). \quad (31)$$

In dem Energiebereich $E_s > 2m_\Theta$ (E_s reell) hat diese Gleichung Lösungen, die sich wie im ursprünglichen LEE-Modell als Streuzustände interpretieren lassen, wenn man wie früher geeignete Randbedin-

²⁰ V. G. VAKS, J. Exp. Theor. Phys. USSR **37** (10), 332 [1959].

²¹ D. A. SLAWNOW u. A. D. SUCHANOW, Phys. Abh. Sowjetunion **1**, 71, 320 [1959].

²² P. DENNERY u. N. M. KROLL, Nucl. Phys. **21**, 276 [1960].

gungen stellt. Ist $E_s < 2m_\Theta$, so verschwindet $\varphi_{0i}(k)$ identisch, und man erhält eine homogene Gleichung für die Funktion $\varphi_1(k)$. Im Falle eines passenden Ansatzes für die zusätzliche Wechselwirkung $V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ können hier nun diskrete Lösungen auftreten.

Man hat im wesentlichen zwei Lösungstypen zu erwarten, entsprechend den beiden Bereichen

- (a) $m_\Theta + E_0 < E_s < 2m_\Theta$,
 (b) $-\infty < E_s < m_\Theta + E_0$.

Im Bereich (a) können sich Lösungen zeigen von der Form

$$\varphi_1(k) = \alpha \delta(\omega - \omega_c) + \chi(k)/[\omega - \omega_c - i\gamma] \quad (16'')$$

$$(\gamma \rightarrow 0, \omega_c = E_s - E_0),$$

wobei $\chi(k)$ für $\omega = \omega_c$ regulär und α nicht willkürlich wählbar ist, sondern einer Bedingung genügt, die (26') entspricht, aber mit dem nun veränderten Integralkern

$$K(\omega_1, \omega_2) = \frac{k_2 \omega_2}{F_0(E - \omega_1)} \left[-\frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2 - E_s)}} + 2 g_2 V(k_1, k_2) \right].$$

Die Integralgleichung für die Funktion $\chi(k)$ erhalten wir, indem wir den Ansatz (16'') in die Gleichung

$$(\omega_1 - \omega_c)^2 \varphi(1) = \int_{m_\Theta}^{\infty} d\omega_2 K(1, 2) \varphi(2)$$

einsetzen und dabei (26') benutzen:

$$(\omega_1 - \omega_c) \chi(1) = \alpha K(1, c) \quad (32)$$

$$+ \int_{m_\Theta}^{\infty} d\omega_2 K(1, 2) \frac{\chi(2)}{\omega_2 - \omega_c - i\gamma}$$

$$= \int d\omega_2 \frac{\chi(2)}{\omega_2 - \omega_c - i\gamma} \left[K(1, 2) - \frac{K(c, 2)}{K(c, c)} K(1, c) \right];$$

$$K(1, c) \equiv K(\omega_1, \omega_c) \quad \text{usw.}$$

Bei der Suche nach einem Potential $V(1, 2)$, das diskrete Lösungen liefert, wurden numerische Methoden zu Hilfe genommen. Dabei zeigte es sich, daß die folgenden *lokalen* Potentiale $V(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ keine solchen Zustände ergeben:

$$V(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \int \exp\{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}\} \tilde{V}(r) d\mathbf{x}$$

wobei

1. $\tilde{V}(r) = \frac{1}{r} e^{-\kappa r}$, 3. $\tilde{V}(r) = r^2 e^{-\lambda r^2}$,
 2. $\tilde{V}(r) = e^{-\lambda r^2}$, 4. $\tilde{V}(r) = r^4 e^{-\lambda r^2}$,

(r bedeutet den Abstand zwischen V- und Θ -Teilchen).

Diese lokalen Potentiale bewirken also in dem Sektor $N + 2 \Theta$ keine wesentlichen Unterschiede gegenüber den Lösungen der HEISENBERGSchen Variante des LEE-Modell.

Setzt man dagegen für $V(1, 2)$ ein nicht-lokales Potential von der Form

$$V(1, 2) = [\sqrt{\omega_1 \omega_2} (\omega_1 + \omega_2 - E')]^{-1}, \quad (33)$$

wo E' ein Parameter ist, so ergibt sich auf analytischem Wege für Gl.(31) im Energiebereich (a) eine Lösung, wenn $g_2 = +1$ und $E_s = E'$ ist. Dann gilt nämlich

$$h(E_s - \omega_1) \varphi_1(k_1) = + \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \frac{\varphi_1(k_2)}{\omega_1 + \omega_2 - E_s} \quad (31')$$

mit der Lösung

$$V \omega \cdot \varphi_1(k) = \frac{h(\omega_c)}{k_c(\omega_c - E_s/2)} \delta(\omega - \omega_c) \quad (34)$$

$$- \frac{1}{(\omega - E_0)(\omega - \omega_c - i\gamma)},$$

wo $\omega_c = E_s - E_0 > m_\Theta$ und $k_c^2 = \omega_c^2 - m_\Theta^2$.

Der hierzu gehörige Lösungsvektor wird im folgenden $|\Phi_a\rangle$ genannt.

Für $g_2 \neq 1$ ist man wiederum auf das GAUSS-NYSTRÖMSche Verfahren angewiesen. Die Rechnung ergibt, daß für $E' = m_\Theta$ und $0,4 \lesssim g_2 \lesssim 1,4$ im Energiebereich (a) immer genau eine Lösung (ähnlich der oben genannten) existiert.

Zustände dieser Art entsprechen formal ein- und auslaufenden Θ -Teilchen, die an einem Φ_0 -System gestreut werden. Wegen der verschwindenden Norm von $|\Phi_0\rangle$ wird man den Gesamtzustand nicht als zerfallendes instabiles Teilchen interpretieren können. Er hat nicht unmittelbare physikalische Bedeutung, sondern könnte analog den longitudinalen Photonen in der Quantenelektrodynamik mittelbar mit der Existenz von Kräften langer Reichweite in Zusammenhang stehen. Untersuchungen am älteren HEISENBERGSchen Spinormodell scheinen diese Vermutung zu unterstützen²³.

Es ist dabei von Interesse, die Norm dieses Zustandes zu berechnen. Führt man die Berechnung im Impulsraum aus, so erhält man natürlich den sinnlosen Ausdruck $0 \cdot \infty$. Integriert man dagegen über die Koordinaten des Θ -Teilchens im Ortsraum

²³ W. HEISENBERG, Rev. Mod. Phys. **29**, 269 [1957].

und läßt erst zuletzt die obere Integrationsgrenze \hat{r} im Ortsraum gegen ∞ gehen, so erhält man wegen der verschwindenden Norm von $|\Phi_0\rangle$ einen end-

lichen, positiven Ausdruck. Dies soll hier für den genannten Fall $g_2=1$, der sich analytisch behandeln läßt, gezeigt werden.

Für die zu betrachtenden Zustände $|E_s\rangle$ im Sektor $N+2\Theta$ gilt

$$\varphi_1(k) = \alpha \delta(\omega - \omega_c) + \chi(k) / (\omega - \omega_c) \quad (35)$$

und daher nach (30')

$$\varphi_2(k_1, k_2) = \frac{g_0}{2\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 - E_s} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}} \left[\alpha \delta(\omega_1 - \omega_c) + \frac{\chi(k_1)}{\omega_1 - \omega_c} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} \left[\alpha \delta(\omega_2 - \omega_c) + \frac{\chi(k_2)}{\omega_2 - \omega_c} \right] \right\}. \quad (36)$$

Der Ausdruck für die Norm lautet (das Minuszeichen im ersten Term rechts folgt aus der Indefinitheit der Metrik):

$$\langle \Phi_a | \Phi_a \rangle = - \int |\Phi_1(x)|^2 d\mathbf{x} + 2 \int |\Phi_2(x_1, x_2)|^2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (37)$$

wobei [unter Benutzung von Gl. (35)]

$$\Phi_1(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \varphi_1(k) \exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}] d\mathbf{k} = (2\pi)^{-3/2} \left[\frac{4\pi\alpha\omega_c}{r} \sin k_c r + \int \frac{\chi(k) \exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}]}{\omega - \omega_c} d\mathbf{k} \right] \quad (38)$$

und $\Phi_2(x_1, x_2) = (2\pi)^{-3} \int \varphi_2(k_1, k_2) \exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{x}_2)] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2$

$$= (2\pi)^{-3} \frac{g_0}{2\sqrt{4\pi}} \left\{ 4\pi\alpha\omega_c \left[\frac{\sin k_c r_1}{r_1} \int \frac{\exp[i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}_2] d\mathbf{k}_2}{\sqrt{2\omega_2(\omega_2 - E_0)}} + \frac{\sin k_c r_2}{r_2} \int \frac{\exp[i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}_1] d\mathbf{k}_1}{\sqrt{2\omega_1(\omega_1 - E_0)}} \right] \right. \\ \left. + \int \left[\frac{\chi(k_1)}{\sqrt{2\omega_2(\omega_1 - \omega_c)}} + \frac{\chi(k_2)}{\sqrt{2\omega_1(\omega_2 - \omega_c)}} \right] \frac{\exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{x}_2)]}{\omega_1 + \omega_2 - E} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \right\}. \quad (39)$$

Daraus folgt

$$(2\pi)^3 \int |\Phi_1(x)|^2 d\mathbf{x} = (4\pi\alpha\omega_c)^2 \int \left(\frac{\sin k_c r}{r} \right)^2 d\mathbf{x} + \int \frac{\chi^*(k) \chi(k')}{(\omega - \omega_c)(\omega' - \omega_c)} \exp[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}] d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\mathbf{x} \\ + 2 \cdot 4\pi\alpha\omega_c \int \frac{\chi(k) \exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}]}{\omega - \omega_c} \frac{\sin k_c r}{r} d\mathbf{k} d\mathbf{x} \quad (40)$$

und $(2\pi)^3 \int |\Phi_2(x_1, x_2)|^2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \quad (41)$

$$= \frac{|g_0|^2}{16\pi(2\pi)^3} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \left\{ (4\pi\alpha\omega_c)^2 \left[\left(\frac{\sin k_c r_1}{r_1} \right)^2 \int \frac{d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}'_2 \exp[i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_2) \cdot \mathbf{x}_2]}{\sqrt{\omega_2 \omega'_2} (\omega_2 - E_0) (\omega'_2 - E_0)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sin k_c r_1 \cdot \sin k_c r_2}{r_1 r_2} \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{x}_2)]}{\sqrt{\omega_1 \omega_2} (\omega_1 - E_0) (\omega_2 - E_0)} \right] \right. \\ \left. + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}'_2 \frac{\chi(k_1')}{\sqrt{\omega'_2} (\omega'_1 - \omega_c)} \left[\frac{\chi(k_1)}{\sqrt{\omega_2} (\omega_1 - \omega_c)} + \frac{\chi(k_2)}{\sqrt{\omega_1} (\omega_2 - \omega_c)} \right] \frac{\exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{x}_2 - \mathbf{k}'_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{k}'_2\mathbf{x}_2)]}{(\omega_1 + \omega_2 - E_s) (\omega'_1 + \omega'_2 - E_s)} \right. \\ \left. + 8\pi\alpha\omega_c \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}'_2 \frac{\sin k_c r_1}{\sqrt{\omega_2} r_1} \left[\frac{\chi(k_1)}{\sqrt{\omega_2} (\omega_1 - \omega_c)} + \frac{\chi(k_2)}{\sqrt{\omega_1} (\omega_2 - \omega_c)} \right] \frac{\exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{x}_2 - \mathbf{k}'_2\mathbf{x}_2)]}{(\omega_1 + \omega_2 - E_s) (\omega'_2 - E_0)} \right\}.$$

Hier wurde davon Gebrauch gemacht, daß $\chi(k)$ reell ist.

Durch Zusammenfassung von (40) und (41) ergibt sich $\langle \Phi_a | \Phi_a \rangle = |g_0|^2 \sum_{i=1}^6 A_i$. (42)

Hier bedeutet $A_1 = \frac{(4\pi\alpha\omega_c)^2}{(2\pi)^3} \int \left(\frac{\sin k_c r}{r} \right)^2 d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{g_0^2} + \frac{1}{8\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{\omega_2(\omega_2 - E_0)^2} \right\}$. (43)

Nun ist aber der Ausdruck $\frac{1}{g_0^2} + \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2(\omega_2 - E_0)^2} = \frac{dh}{dE} \Big|_{E=E_0} = 0$, (44)

nämlich gleich der Norm des Zustandes $|\Phi_0\rangle$; bei der oben angegebenen Reihenfolge der Grenzübergänge wird daher

$$A_1 = 0.$$

Ferner ist

$$A_2 = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{x}_1 \frac{\chi^*(k_1) \chi(k_1')}{(\omega_1 - \omega_c)(\omega_1' - \omega_c)} \exp[i(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}_1] \left\{ \frac{1}{g_0^2} + \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2(\omega_1 + \omega_2 - E_s)(\omega_1' + \omega_2 - E_s)} \right\}.$$

Benutzen wir hier wiederum, daß $(1/g_0^2) = -(1/8\pi) \int d\mathbf{k}_2 / [\omega_2(\omega_2 - E_0)^2]$ gilt [Gl.(44)],

so erhalten wir

$$A_2 = \frac{1}{(2\pi)^3 8\pi} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{x}_1 \frac{\chi^*(k_1) \chi(k_1')}{\omega_2(\omega_2 - E_0)^2} \exp[i(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}_1] \cdot \left\{ \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2 - E_s)(\omega_1' + \omega_2 - E_s)} - \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2 - E_s)(\omega_1' - \omega_c)} - \frac{1}{(\omega_1' + \omega_2 - E_s)(\omega_1 - \omega_c)} \right\}.$$

Jetzt kann man über \mathbf{x}_1 integrieren, denn es gibt nur noch einfache Pole bei $\omega_1 = \omega_c$ und $\omega_1' = \omega_c$:

$$A_2 = -\frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \frac{|\chi(k_1)|^2}{\omega_2(\omega_2 - E_0)(\omega_1 + \omega_2 - E_s)(\omega_1 - \omega_c)} \left\{ \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 - E_s} + \frac{1}{\omega_2 - E_0} \right\}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{8\pi\alpha\omega_c}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{x}_1 \frac{\chi(k_1) \exp[i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1]}{\omega_1 - \omega_c} \frac{\sin k_c r_1}{r_1} \left\{ \frac{1}{g_0^2} + \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2(\omega_2 - E_0)(\omega_1 + \omega_2 - E_s)} \right\} \\ &= -\frac{\alpha\omega_c}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{x}_1 \chi(k_1) \exp[i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1] \frac{\sin k_c r_1}{r_1} \frac{1}{\omega_2(\omega_2 - E_0)(\omega_1 + \omega_2 - E_s)} \\ &= -\alpha\chi(\omega_c) k_c \omega_c \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2(\omega_2 - E_0)^3}, \\ A_4 &= \frac{2\pi\alpha^2 k_c^2 \omega_c}{(\omega_c - E_0)^2}, \quad A_5 = \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \frac{\chi(k_1) \chi(k_2)}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_c)(\omega_2 - \omega_c)(\omega_1 + \omega_2 - E_s)^2}}, \\ A_6 &= \alpha \sqrt{\omega_c} k_c \int d\mathbf{k}_2 \frac{\chi(k_2)}{\sqrt{\omega_2(\omega_2 - \omega_c)(\omega_2 - E_0)^2}}. \end{aligned}$$

Nimmt man nun an, daß $g_2 = 1$ und $E_s = E'$ ist und setzt die hierfür bekannte Lösung (34)

$$\alpha = h(\omega_c) / [k_c \sqrt{\omega_c} (\omega_c - E_s/2)]; \quad \chi(k) = -[\sqrt{\omega}(\omega - E_0)]^{-1}$$

in die Ausdrücke A_i ein, so erhält man durch eine langwierige, aber elementare Rechnung aus Gl. (42)

$$\langle \Phi_a | \Phi_a \rangle = 4\pi |g_0|^2 \int_{m_\Theta}^{\infty} \int_{m_\Theta}^{\infty} k_1 d\omega_1 k_2 d\omega_2 \frac{2(\omega_1 + \omega_2 - E_s) + (\omega_1 - E_0)}{(\omega_1 + \omega_2 - E_s)^2 (\omega_1 - E_0)^2 (\omega_2 - E_0)^2}. \quad (45)$$

Wegen $E_s < 2m_\Theta$ und $E_0 < m_\Theta$ ist der Zähler positiv, und damit ist die Norm

$$\langle \Phi_a | \Phi_a \rangle > 0. \quad (46)$$

Für verschiedene andere Werte der Kopplungskonstanten g_2 wurde die Norm numerisch berechnet. Sie hat sich auch in diesen Fällen als positiv ergeben.

Für die späteren Untersuchungen, welche die Übergänge von Streuzuständen des Sektors $N+3\Theta$ in diesen Zustand $|\Phi_a\rangle$ betreffen, ist außerdem folgendes Ergebnis wichtig. Nimmt man an, daß die Funktion $h(E)$ komplexe Nullstellen hat:

$$h(E_0 \pm i\varepsilon) = 0,$$

so erhält man im Sektor $N+2\Theta$ Lösungen, die für

$\varepsilon \rightarrow 0$ in $|\Phi_a\rangle$ übergehen. Diese gehören aber nicht zu realem, sondern komplexem Energieniveau E_s :

$$\Im E_s = \pm \varepsilon.$$

Lösungen mit $E = E_a$ gibt es in diesem Falle nicht. Zustände mit jener komplexen Energie E_s können natürlich nicht in der Endkonfiguration von (reellen) Streuprozessen des Sektors $N+3\Theta$ auftreten. Dies macht das spätere Ergebnis verständlich, daß auch im Dipolfalle Übergänge in den Zustand $|\Phi_a\rangle$ nicht möglich sind.

Anders ist es mit gebundenen Zuständen $|\Phi_b\rangle$ des Energiebereiches (b), wo

$$E_s < m_\Theta + E_0 \quad \text{ist.}$$

Die Integralgleichung (31) läßt sich umformen in

$$\psi(k_1) = \frac{1}{(\omega_1 - \omega_c)^2 F_0(E - \omega_1)} \int_{m_\Theta}^{\infty} k_2 d\omega_2 \psi(k_2) \quad (47)$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\omega_1 + \omega_2 - E} + \frac{2 g_2}{\omega_1 + \omega_2 - E'} \right],$$

wo

$$\psi(k) \equiv \sqrt{\omega} \varphi_1(k).$$

Die Lösungen sind also im allgemeinen durch einen Doppelpol bei $\omega = \omega_c < m_\Theta$ gekennzeichnet. Die numerische Behandlung der Integralgleichung zeigt, daß es in dem Bereich $0,4 \leq g_2 \leq 1$ mindestens je eine und für $g_2 \geq 1$ mindestens je zwei Lösungen gibt. Bei der Berechnung dieser gebundenen Zustände wurde wiederum $E' = m_\Theta$ gesetzt.

Für die Norm bekommt man den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle \Phi_b | \Phi_b \rangle &= - \int |\varphi_1(k_1)|^2 d\mathbf{k}_1 + 2 \int |\varphi_2(k_1, k_2)|^2 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ &= - \int |\varphi_1(k_1)|^2 d\mathbf{k}_1 + \frac{|g_0|^2}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(\omega_1 + \omega_2 - E_s)^2} \left[\frac{|\varphi_1(k_2)|^2}{\omega_2} + \frac{\varphi_1(k_1) \varphi_1(k_2)}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \right] \\ &= |g_0|^2 \int |\varphi_1(k_1)|^2 d\mathbf{k}_1 \underbrace{\left[\frac{1}{g_0^2} + \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2(\omega_2 - E_0)^2} \right]}_{=0} \\ &\quad + 2\pi |g_0|^2 \int_{m_\Theta}^{\infty} \int_{m_\Theta}^{\infty} k_1 d\omega_1 k_2 d\omega_2 \left\{ |\psi(k_1)|^2 \left[\frac{1}{(\omega_1 + \omega_2 - E_s)^2} - \frac{1}{(\omega_2 - E_0)^2} \right] + \frac{\psi(k_1) \psi(k_2)}{(\omega_1 + \omega_2 - E_s^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Er ist numerisch ausgewertet worden. Das Ergebnis lautet:

Die Norm aller gebundenen Zustände $|\Phi_b\rangle$, die gefunden wurden, ist negativ.

§ 4. Übergänge in diskrete Zustände

Es ist nun zu untersuchen, ob die neuen diskreten Zustände des erweiterten LEE-Modells Interpretationsschwierigkeiten bereiten, die sich nicht durch die Dipol-Festlegung des HAMILTON-Operators und durch Stellung geeigneter Randbedingungen für die Streuzustände höherer Sektoren des Modells erledigen lassen. Wir betrachten daher als Beispiel den Sektor $N+3\Theta$, dessen Eigenvektoren die Form haben

$$\begin{aligned} |E\rangle &= [\psi_V^* \int \varphi_1(k_1, k_2) a^*(\mathbf{k}_1) a^*(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ &\quad + \psi_N^* \int \varphi_2(k_1, k_2, k_3) a^*(\mathbf{k}_1) a^*(\mathbf{k}_2) \\ &\quad \cdot a^*(\mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3] |0\rangle. \end{aligned} \quad (49)$$

Es sei $E > 3 m_\Theta$. Die SCHRÖDINGER-Gleichung ergibt dann nach Elimination von $\varphi_2(1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} (E - E_0 - \omega_1 - \omega_2)^2 \varphi_1(k_1, k_2) &= \int_{m_\Theta}^{\infty} K(1, 2, 3) \varphi_1(1, 3) d\omega_3 \\ &\quad + \int_{m_\Theta}^{\infty} K(2, 1, 3) \varphi_1(2, 3) d\omega_3 + \varphi_{0i}(1, 2), \end{aligned} \quad (50)$$

wobei

$$\begin{aligned} K(1, 2, 3) &= k_3 \omega_3 [\sqrt{\omega_2 \omega_3} (E - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + i\gamma)]^{-1} + 2 g_2 V(2, 3) \\ &\quad - \int_{m_\Theta}^{\infty} k d\omega (\omega - E_0)^{-2} (\omega + \omega_1 + \omega_2 - E - i\gamma)^{-1} \end{aligned}$$

Die Funktion $\varphi_{0i}(1, 2)$ stammt – ähnlich wie im Sektor $N+2\Theta$ – von einlaufenden Θ -Teilchen. Nach HEISENBERG¹⁴ sind auch hier nur diejenigen Zustände physikalisch sinnvoll, für die die rechte Seite der Gleichung verschwindet, wenn

$$E - E_0 - \omega_1 - \omega_2 = 0$$

ist. Dann führt nämlich die doppelte Nullstelle von $h(E - \omega_1 - \omega_2)$ nicht zu einem Doppelpol, sondern einem einfachen Pol der Funktion $\varphi_1(1, 2)$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(1, 2) &= \alpha(1, 2) \delta(E - E_0 - \omega_1 - \omega_2) \\ &\quad + \frac{\chi(1, 2)}{E - E_0 - \omega_1 - \omega_2 + i\gamma} \quad (\gamma \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (51)$$

Der Faktor $\alpha(1, 2)$ ist so festzulegen, daß die erwähnte Bedingung erfüllt ist.

Diese Lösung ergibt sich von selbst eindeutig, wenn man zunächst die Parameter im HAMILTON-Operator so bestimmt, daß die Funktion $h(z)$ konjugiert-komplexe Nullstellen bei $z = E_0 \pm i\epsilon$ hat, und nun diejenigen Lösungen mit realem E betrachtet, die man für $\epsilon \rightarrow 0$ erhält. Das soll hier durchgeführt werden, weil dann die Eigenschaften von $\alpha(1, 2)$ klarer sichtbar werden.

Statt Gl. (50) schreiben wir also

$$\begin{aligned} & [(E - E_0 - \omega_1 - \omega_2)^2 + \varepsilon^2] \varphi_1(1, 2) \\ &= \int_{m\Theta}^{\infty} K_{\varepsilon}(1, 2, 3) \varphi_1(1, 3) d\omega_3 \quad (50') \\ &+ \int_{m\Theta}^{\infty} K_{\varepsilon}(2, 1, 3) \varphi_1(2, 3) d\omega_3 + \varphi_{0i}(1, 2) \end{aligned}$$

mit

$$K_{\varepsilon}(1, 2, 3) = k_3 \omega_3$$

$$\cdot \frac{[V\omega_2\omega_3(E - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + i\gamma)]^{-1} + 2g_2V(3, 2)}{\int_{m\Theta}^{\infty} k \omega [(\omega - E_0)^2 + \varepsilon^2]^{-1} (\omega + \omega_1 + \omega_2 - E)^{-1}}.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man die Lösung in einen Anteil, der bei $E - E_0 - \omega_1 - \omega_2 = 0$ verschwindet, und einen Rest zerlegen:

$$\varphi_1(1, 2) = \frac{(E - E_0 - \omega_1 - \omega_2) \chi(1, 2) + \beta(1, 2)}{(E - E_0 - \omega_1 - \omega_2)^2 + \varepsilon^2}. \quad (51')$$

Da $\varphi_1(1, 2)$ symmetrisch in k_1 und k_2 ist, sind auch $\chi(1, 2)$ und $\beta(1, 2)$ als symmetrisch anzusetzen.

Ist $E - E_0 - \omega_1 - \omega_2 = 0$, so sei $\chi(1, 2)$ regulär, und daher auf dieser Geraden der (ω_1, ω_2) -Ebene

$$\beta(1, 2) = \varepsilon^2 \varphi_1(1, 2). \quad (52)$$

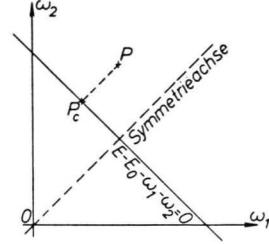


Abb. 1.

In der übrigen (ω_1, ω_2) -Ebene lässt sich β z. B. so festlegen, daß es längs jeder zur Symmetrieachse parallelen Geraden konstant ist (siehe Abb. 1).

$$\beta(\omega_1, \omega_2) = \beta\left(\frac{\omega_c}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_c}{2}; \frac{\omega_c}{2} - \frac{\omega_1 - \omega_c}{2}\right);$$

mit anderen Worten: $\beta(P) = \beta(P_c)$. (53)

Wir setzen (51') in Gl. (50') ein und bekommen die Integralgleichung

$$\begin{aligned} (E - E_0 - \omega_1 - \omega_2) \chi(1, 2) + \beta(1, 2) &= \int_{m\Theta}^{\infty} d\omega_3 K(1, 2, 3) \frac{(E - E_0 - \omega_1 - \omega_3) \chi(1, 3) + \beta(1, c2) + [\beta(1, 3) - \beta(1, c2)]}{(E - E_0 - \omega_1 - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} \\ &+ \int_{m\Theta}^{\infty} d\omega_3 K(2, 1, 3) \frac{(E - E_0 - \omega_2 - \omega_3) \chi(2, 3) + \beta(2, c1) + [\beta(2, 3) - \beta(2, c1)]}{(E - E_0 - \omega_2 - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} + \varphi_{0i}(1, 2). \end{aligned} \quad (54)$$

Auf der Geraden $E - E_0 - \omega_1 - \omega_2 = 0$ erhält man daraus mit $\omega_{c2} \equiv E - E_0 - \omega_1$ und $\omega_{c1} \equiv E - E_0 - \omega_2$:

$$\begin{aligned} \beta(1, c2) &= \int_{m\Theta}^{\infty} d\omega_3 K(1, c2, 3) \frac{(\omega_{c2} - \omega_3) \chi(1, 3) + [\beta(1, 3) - \beta(1, c2)] + \beta(1, c2)}{(\omega_{c2} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} \\ &+ \int_{m\Theta}^{\infty} d\omega_3 K(c2, 1, 3) \frac{(\omega_1 - \omega_3) \chi(c2, 3) + [\beta(c2, 3) - \beta(c2, 1)] + \beta(c2, 1)}{(\omega_1 - \omega_3)^2 + \varepsilon^2}; \quad \varphi_{0i}(1, c2) \equiv 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Die Variable ω_2 ist hier durch ω_1 ausgedrückt, und in den Zählern unter den Integralen wurde $\beta(1, c2) = \beta(c2, 1)$ addiert und subtrahiert. Lösen wir diese Gleichung nun nach $\beta(1, c2)$ auf, so können wir die Größenordnung von $\beta(1, c2)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ feststellen:

$$\begin{aligned} &\beta(1, c2) \\ &= \frac{\int d\omega_3 K(1, c2, 3) \frac{(\omega_{c2} - \omega_3) \chi(1, 3) + [\beta(1, 3) - \beta(1, c2)]}{(\omega_{c2} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} + \int d\omega_3 K(c2, 1, 3) \frac{(\omega_1 - \omega_3) \chi(c2, 3) + [\beta(c2, 3) - \beta(c2, 1)]}{(\omega_1 - \omega_3)^2 + \varepsilon^2}}{1 - \int d\omega_3 \frac{K(1, c2, 3)}{(\omega_{c2} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} - \int d\omega_3 \frac{K(c2, 1, 3)}{(\omega_1 - \omega_3)^2 + \varepsilon^2}}. \end{aligned} \quad (56)$$

Die Integranden haben Pole in der komplexen ω_3 -Ebene, und zwar bei

$$\omega_3 = \omega_{c2} \pm i\varepsilon \quad \text{bzw. bei} \quad \omega_3 = \omega_1 \pm i\varepsilon.$$

Integriert man nun auf der reellen ω_3 -Achse von m_θ bis ∞ , so wird mindestens eines der beiden Integrale im Nenner des Ausdrucks (56) sich wie ε^{-1} verhalten, denn ist $\omega_1 > m_\theta$, so führt der Integrationsweg zwischen den beiden Polen im zweiten Integrale hindurch, andernfalls zwischen den Polen im ersten Integral. Ist nämlich

$$\omega_1 < m_\theta, \text{ so ist } \omega_{c2} = E - E_0 - \omega_1 > m_\theta, \text{ da } E > 3 m_\theta \text{ und } E_0 < m_\theta.$$

Die beiden Integrale im Zähler des Ausdrucks (56) werden dagegen höchstens von der Größenordnung von χ sein, da ihre Integranden in der Nähe der Pole verschwinden. Daraus folgt, daß $\beta(1, c2)$ von der Größenordnung $\varepsilon \chi$ sein muß.

Setzt man nun

$$\beta(1, c2) = (\varepsilon/\pi) \alpha(1, c2),$$

so sieht man, daß für $\varepsilon \rightarrow 0$ Gl. (51') in Gl. (51) übergeht. Hierbei wird der Satz benutzt, daß für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(1/\pi) \cdot |\varepsilon| / (x^2 + \varepsilon^2) \quad \text{in die Distribution } \delta(x) \quad (57)$$

und

$$x / (x^2 + \varepsilon^2) \quad \text{in } P/x \text{ übergeht (} P \text{ bezeichnet den CAUCHYSchen Hauptwert).}$$

Wegen der Festsetzung (53) ist $\beta(1, 2)$ in der ganzen (ω_1, ω_2) -Ebene von derselben Größenordnung wie auf der „kritischen“ Geraden. Man kann für kleines ε daher im Zähler von (56) die in eckigen Klammern stehenden Anteile gegenüber χ vernachlässigen, sowie im Nenner die 1 gegenüber den dort stehenden Integralen.

Man erhält dann aus Gl. (54) bei genügend kleinem ε für χ die Integralgleichung²⁴

$$\begin{aligned} (E - E_0 - \omega_1 - \omega_2) \chi(1, 2) &= \int d\omega_3 K(1, 2, 3) \frac{(\omega_{c2} - \omega_3) \chi(1, 3)}{(\omega_{c2} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} + \int d\omega_3 K(2, 1, 3) \frac{(\omega_{c1} - \omega_3) \chi(2, 3)}{(\omega_{c1} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} \\ &\quad - \frac{\int d\omega_3 K(1, c2, 3) \frac{(\omega_{c2} - \omega_3) \chi(1, 3)}{(\omega_{c2} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} + \int d\omega_3 K(c2, 1, 3) \frac{(\omega_1 - \omega_3) \chi(c2, 3)}{(\omega_1 - \omega_3)^2 + \varepsilon^2}}{\int d\omega_3 K(1, c2, 3) \frac{1}{(\omega_{c2} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} + \int d\omega_3 K(c2, 1, 3) \frac{1}{(\omega_1 - \omega_3)^2 + \varepsilon^2}} \cdot \int d\omega_3 K(1, 2, 3) \frac{1}{(\omega_{c2} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} \\ &\quad - \frac{\int d\omega_3 K(2, c1, 3) \frac{(\omega_{c1} - \omega_3) \chi(2, 3)}{(\omega_{c1} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} + \int d\omega_3 K(c1, 2, 3) \frac{(\omega_2 - \omega_3) \chi(c1, 3)}{(\omega_2 - \omega_3)^2 + \varepsilon^2}}{\int d\omega_3 K(2, c1, 3) \frac{1}{(\omega_{c1} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} + \int d\omega_3 K(c1, 2, 3) \frac{1}{(\omega_2 - \omega_3)^2 + \varepsilon^2}} \cdot \int d\omega_3 K(2, 1, 3) \frac{1}{(\omega_{c1} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} \\ &\quad + \varphi_{0i}(1, 2). \end{aligned} \quad (58)$$

Tatsächlich verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung auf der kritischen Geraden, solange die einzelnen Terme auf dieser Geraden regulär sind.

Wenn es bei solchen Streuprozessen Übergänge in die im vorigen Kapitel beschriebenen diskreten Zustände der Energie E_s gibt, muß nach HEISENBERG¹⁴ die Funktion χ bestimmte Pole haben. Zum Beispiel wäre dann in der Umgebung von $\omega_1 = E - E_s$ (entsprechend von $\omega_2 = E - E_s$)

$$\chi(1, 2) \approx \psi(1, 2) / (E - E_s - \omega_1). \quad (59)$$

Energiebereich (a):

Wäre ein Übergang in den Zustand des Energiebereiches (a) ($m_\theta + E_0 < E_s < 2 m_\theta$) möglich, so müßte sich die Funktion $\psi(1, 2)$ in der Umgebung eines solchen Poles, z. B. bei $\omega_1 \approx E - E_s$, in Abhängigkeit von ω_2 verhalten wie die Funktion $\chi(\omega)$ [Gl. (35)] des Sektors $N + 2 \Theta$ (vgl. ¹⁴). Es wird nun gezeigt, daß die Funktion $\psi(1, 2)$ dies nicht tut, daß also Übergänge in den Zustand $|\Phi_a\rangle$ nicht auftreten können.

In der Umgebung des Punktes $\omega_1 = E - E_s$ würde der im Falle eines Überganges vorhandene Pol zur Folge haben, daß in der Integralgleichung (58) diejenigen Terme groß gegenüber allen anderen würden,

²⁴ Eine ähnliche, aber teilweise hiervon abweichende Gleichung haben DENNERY und KROLL²² im Anhang II ihrer Arbeit abgeleitet.

die $\chi(1, 2)$ oder $\chi(1, 3)$ enthalten. Daraus ergibt sich eine Integralgleichung für $\psi(1, 2)$ in Abhängigkeit von der zweiten Variablen:

$$\underbrace{(E_s - E_0 - \omega_2) \psi(2)}_{\omega_c} = \int d\omega_3 \frac{(\omega_c - \omega_3) \psi(3)}{(\omega_c - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} \left\{ K(E - E_s, 2, 3) - \frac{K(E - E_s, c, 3) \int d\omega_3' K(E - E_s, 2, 3') \frac{1}{(\omega_c - \omega_3')^2 + \varepsilon^2}}{\int d\omega_3'' \frac{K(E - E_s, c, 3'')}{(\omega_c - \omega_3'')^2 + \varepsilon^2} + \int d\omega_3'' \frac{K(c, E - E_s, \omega_3'')}{(\omega_1 - \omega_3'')^2 + \varepsilon^2}} \right\},$$

wo

$$E_s - E_0 = \omega_c \quad \text{und} \quad \psi(2) \equiv \psi(E - E_s, \omega_2). \quad (60)$$

Diese Gleichung ist nicht die von der Funktion $\chi(\omega)$ des Sektors $N + 2 \Theta$ erfüllte Integralgleichung, welche die Form hat

$$(\omega_c - \omega_2) \psi(2) = \int d\omega_3 \frac{(\omega_c - \omega_3) \psi(3)}{(\omega_c - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} \left\{ K(E - E_s, 2, 3) - \frac{K(E - E_s, c, 3) \int d\omega_3' K(E - E_s, 2, 3') \frac{1}{(\omega_c - \omega_3')^2 + \varepsilon^2}}{\int d\omega_3'' \frac{K(E - E_s, c, 3'')}{(\omega_c - \omega_3'')^2 + \varepsilon^2}} \right\}. \quad (61)$$

Das ergibt sich durch Einsetzen des Integralkernes des erweiterten LEE-Modells in die ursprüngliche Gl. (27) und Anwendung auf den Dipolfall. Der Unterschied zwischen den Gln. (60) und (61) besteht also in dem Zusatzglied

$$\int d\omega_3'' \cdot K(c, E - E_s, \omega_3'') / [(\omega_1 - \omega_3'')^2 + \varepsilon^2] \quad (62)$$

im Nenner von Gl. (60). Es stammt von der Funktion β [Gl. (56)], letzten Endes also von den Randbedingungen, die wir im Sektor $N + 3 \Theta$ gestellt haben. Dieses Zusatzglied würde auch dann vorhanden sein, wenn man nicht den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ betrachten, sondern von vornherein mit $\varepsilon = 0$ (also mit Distributionen) rechnen und „künstlich“ die Randbedingungen stellen würde, durch die die Funktion $\varphi_1(1, 2)$ einen einfachen statt einen doppelten Pol auf der kritischen Geraden bekommt.

Man hat keine Möglichkeit, diesen Doppelpol durch eine andere Randbedingung zu beseitigen, bei der das zusätzliche Glied fehlt. Insbesondere gibt es keine Bedingung, durch die jedes der beiden Integrale in Gl. (50) *für sich* auf der kritischen Geraden wie ε zum Verschwinden gebracht werden kann. Eine solche Bedingung würde der Symmetrie der Funktion $\chi(1, 2)$ bzw. $\alpha(1, 2)$ in den beiden Variablen widersprechen.

Setzt man nämlich in Gl. (50) für $\varphi_1(1, 2)$ die Funktion

$$\alpha(1, 2) \delta(E - E_0 - \omega_1 - \omega_2) + \frac{\chi(1, 2)}{E - E_0 - \omega_1 - \omega_2}$$

ein und verlangt, daß auf der kritischen Geraden $(E - E_0 - \omega_1 - \omega_2 = 0)$ jedes Integral der rechten

Seite von Gl. (50) *einzel*n verschwinden soll, so erhält man ($\omega_{c2} > m_\Theta$ vorausgesetzt) für $\alpha(1, 2)$ die Bedingung

$$\alpha(1, c2) K(1, c2, c2) + \int K(1, c2, 3) \frac{\chi(1, 3)}{E - E_0 - \omega_1 - \omega_3} d\omega_3 = 0,$$

also

$$\alpha(1, c2) = - \frac{\int K(1, c2, 3) [\chi(1, 3) / (\omega_{c2} - \omega_3)] d\omega_3}{K(1, c2, c2)}.$$

Die rechte Seite hiervon ist aber nicht symmetrisch in den Variablen ω_1 und ω_2 .

In der Endkonfiguration eines Streuprozesses des Sektors $N + 3 \Theta$ kann also der Zustand $|\Phi_a\rangle$ nicht auftreten. Dasselbe gilt aber für Streuprozesse aller Sektoren $N + z \Theta$, denn dort stehen im Nenner des der Funktion β [Gl. (56)] entsprechenden Ausdruckes allgemein $z - 1$ Summanden. Dies bedeutet: man kann keinen Prozeß angeben, durch den sich ein System $|\Phi_a\rangle$ erzeugen läßt. Trotz seiner positiven Norm ist dieser Zustand daher nicht physikalisch interpretierbar.

Energiebereich (b):

Wir untersuchen nun für die Streuzustände des Sektors $N + 3 \Theta$ die Frage, ob unsere Randbedingungen eine Gewähr dafür bieten, daß keine Übergänge in die gebundenen Zustände des Energiebereiches (b) ($-\infty < E_s < m_\Theta + E_0$) auftreten können. Zunächst könnte man nämlich denken, daß die zu $|\Phi_b\rangle$ gehörende Funktion $\varphi_1(\omega_2)$ in $\chi(1, 2)$ nicht enthalten sei, da χ nicht allgemein auf der kritischen Geraden $E - E_0 - \omega_1 - \omega_2 = 0$ singulär ist, also

$\varphi_1(1, 2)$ im allgemeinen dort nur einen einfachen Pol hat, die Funktion $\varphi_1(\omega_2)$ dagegen bei $\omega_2 = E_s - E_0$ einen Doppelpol.

Ähnlich wie im Falle (a) interessiert das Verhalten der Funktion $\chi(1, 2)$ in der Umgebung des Punktes $\omega_1 = E - E_s$, an welchem $\chi(1, 2)$ einen Pol hat, falls die fraglichen Übergänge existieren. In Gl. (58) werden dann diejenigen Glieder, die $\chi(1, 2)$ oder $\chi(1, 3)$ enthalten, groß sein im Vergleich zu den übrigen. Im Gegensatz zum Fall (a) ist nun aber zu beachten, daß für $\omega_1 = E - E_s$ die Größe $\omega_{c2} < m_\theta$ wird. Das Integral

$$\int d\omega_3 K(1, 2, 3) / [(\omega_{c2} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2] \quad (63)$$

hat daher jetzt die Größenordnung von 1, nicht mehr die von ε^{-1} . Im Nenner des zweiten Terms auf der rechten Seite von Gl. (58) steht aber nach wie vor das Integral

$$\int d\omega_3 K(c2, 1, 3) / [(\omega_1 - \omega_3)^2 + \varepsilon^2],$$

das sich wie ε^{-1} verhält. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet also der erwähnte zweite Term, und der erste Term

$$\int d\omega_3 K(1, 2, 3) ([\omega_{c2} - \omega_3] / [(\omega_{c2} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2]) \cdot \chi(1, 3)$$

überwiegt über alle anderen Glieder der rechten Seite von Gl. (58). Damit sind nun aber diejenigen Terme weggefallen, die sonst die rechte Seite von Gl. (58) auf der kritischen Geraden zum Verschwinden brachten.

Es ist für $\omega_1 \approx E - E_s$

$$\begin{aligned} & \int d\omega_3 K(1, 2, 3) \frac{\omega_{c2} - \omega_3}{(\omega_{c2} - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} \chi(1, 3) \quad (64) \\ & \approx \int d\omega_3 K(E - E_s, 2, 3) \frac{(\omega_c - \omega_3)}{(\omega_c - \omega_3)^2 + \varepsilon^2} \frac{\psi(3)}{E - E_s - \omega_1} \end{aligned}$$

und nach Gl. (50')

$$\begin{aligned} & K(E - E_s, 2, 3) \\ & = \frac{k_3 \omega_3}{F_0(E_s - \omega_2)} \left[\frac{1}{\sqrt{\omega_2 \omega_3 (E_s - \omega_2 - \omega_3)}} + 2 g_2 V(2, 3) \right]. \end{aligned}$$

Dies ist aber der Integralkern des Sektors $N + 2 \Theta$. Die linke Seite von Gl. (58) geht über in

$$\underbrace{(E_s - E_0 - \omega_2)}_{\omega_c} \cdot \psi(2) / (E - E_s - \omega_1).$$

Man erhält damit für den Ausdruck $\psi(2) / (\omega_c - \omega_2)$ als Funktion von ω_2 für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Gl. (31), die einem diskreten Zustand des Sektors $N + 2 \Theta$ entspricht.

Die Annahme, daß es Übergänge in einen Zustand $|\Phi_b\rangle$ gibt, führt also nicht sichtbar zu einem Widerspruch zu den hier gestellten Randbedingungen. Man erhält damit eine Aussage, die im wesentlichen mit derjenigen von DENNERY und KROLL²² übereinstimmt.

Dies Ergebnis zeigt sich auch, wenn man in Gl. (58) denjenigen Term betrachtet, der $\chi(c1, 3)$ enthält. Ein Pol der Funktion $\chi(1, 2)$ bei $\omega_1 = E - E_s$ würde bedeuten, daß $\chi(c1, 3)$ und damit auf Grund von Gl. (58) auch $\chi(1, 2)$ einen Pol bei $\omega_{c1} = E - E_s$ hat, d. h. bei $\omega_1 = E_s - E_0$.

Wesentlich für diese Überlegungen war es u. a., daß das Integral

$$I(\omega_{c2}) = \int_{m_\theta}^{\infty} K(1, 2, 3) \frac{\varepsilon/\pi}{(\omega_3 - \omega_{c2})^2 + \varepsilon^2} d\omega_3$$

sich in Abhängigkeit von ω_{c2} für $\varepsilon \rightarrow 0$ wie eine Θ -Funktion verhält. Die Unstetigkeit bei $\omega_{c2} = m_\theta$ kann man vermeiden, wenn man den Integrationsweg in den Integralen dieser Art anders wählt als bisher.

Solange man nur für $\omega_{c2} > m_\theta$ festlegt, daß auf der reellen ω_3 -Achse von m_θ bis ∞ integriert werden soll, ist noch nicht eindeutig bestimmt, welche Werte die Funktion $I(\omega_{c2})$ in der linken ω_{c2} -Halbebene annimmt, denn bei $\omega_{c2} = m_\theta \pm i\varepsilon$ haben wir Verzweigungspunkte. Integriert man nun auch für $\omega_{c2} < m_\theta$ auf demselben Wege, so ist das gleichbedeutend mit einer analytischen Fortsetzung von $I(\omega_{c2})$ zwischen den Verzweigungspunkten hindurch (Abb. 2). Diese Wahl ist in den bisherigen Rechnungen immer getroffen worden. Die Funktion $I(\omega_{c2})$ war dann bei endlichem ε in $\omega_{c2} = m_\theta$ stetig, wurde aber für $\varepsilon \rightarrow 0$ dort unstetig.

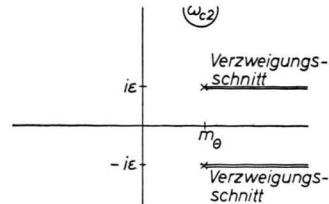
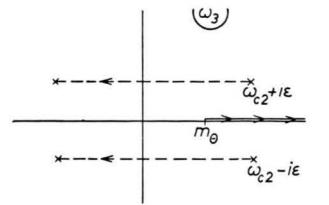


Abb. 2.

Setzt man dagegen (oben oder unten) um die Verzweigungspunkte herum analytisch fort (Abb. 3), so erhält man für endliches ε zwar eine Unstetigkeit bei $\omega_{c2} = m_\theta$, diese wird aber „glatt“ durch den Übergang

$\varepsilon \rightarrow 0$, und $I(\omega_{c2})$ hat dann auch für $\omega_{c2} < m_\theta$ die Größenordnung 1. Dies bedeutet, man hat in der ω_3 -Ebene für $\omega_{c2} < m_\theta$ zusätzlich zum alten Integrationsweg noch das Residuum an einem der beiden Pole $\omega_3 = \omega_{c2} \pm i\varepsilon$ des Integranden zu nehmen.

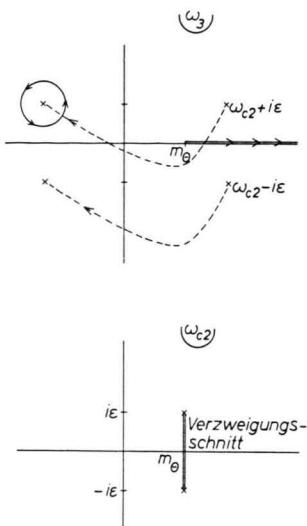


Abb. 3.

Nun ist aber das Verhalten der Funktion $\varphi_1(1, 2)$ im Ortsraum nicht mehr interpretierbar. Ihre FOURIER-Transformierte enthält nämlich für $-m_\theta < \omega_{c2} < m_\theta$ infolge jenes Residuums einen Anteil von der Form

$$\varepsilon \frac{4\pi}{r} \oint \frac{\sin kr}{(\omega - \omega_{c2})^2 + \varepsilon^2} \omega d\omega = \frac{2\pi i}{2i} \cdot \frac{4\pi}{r} (\omega_{c2} + i\varepsilon) \sin k'r,$$

wo $k'^2 = (\omega_{c2} + i\varepsilon)^2 - m_\theta^2$.

Die Größe k' hat z. B. für $\omega_{c2} \approx 0$ einen Imaginärteil der Größenordnung m_θ und damit $\sin k'r$ einen exponentiell ansteigenden Anteil, der nicht mit ε verschwindet. Eine ähnliche Schwierigkeit ergibt sich bei dem Versuch, schon für $\omega_{c2} > m_\theta$ den Integrationsweg um die Pole $\omega_3 = \omega_{c2} \pm i\varepsilon$ herum zu legen, also von vornherein von einem anderen Blatt der RIEMANNSchen Fläche auszugehen.

§ 5. Schluß

Die bisher diskutierten Randbedingungen können also nur ausreichen, um Übergänge in den Zustand $|\Phi_D\rangle$ zu verhindern, nicht aber, um auch $|\Phi_b\rangle$ aus der Endkonfiguration auszuschließen. Als Ausweg aus dieser Schwierigkeit liegt es daher nahe, hier eine BOGOLJUBOWSche Forderung hinzuzufügen, ähn-

lich wie sie in Gl. (23) auf das System Θ -Teilchen – Φ_- angewandt wurde. Hat nämlich die Funktion $\chi(1, 2)$ Pole bei $\omega_1 = E - E_s$ und $\omega_2 = E - E_s$, so kann man für sie ansetzen

$$\chi(1, 2) = A(1) \delta(E - E_s - \omega_2) + A(2) \delta(E - E_s - \omega_1) + \psi(1, 2)/(E - E_s - \omega_1) + \psi(2, 1)/(E - E_s - \omega_2).$$

Über die Funktion A kann man nun derart verfügen, daß die Amplitude der einlaufenden Θ -Teilchen der Energie $\omega = E - E_s$ gleich der Amplitude der auslaufenden Θ -Teilchen dieser Energie ist. Die Wahrscheinlichkeiten, in der Anfangs- und in der Endkonfiguration den Zustand $|\Phi_b\rangle$ vorzufinden, sind dann gleich.

Zur Anwendung des Verfahrens entwickeln wir den Streuzustand des Sektors $N+3\Theta$ [Gl. (49)] nach Produktion von Eigenzuständen der Sektoren $N+2\Theta$ ($n_1=1$; $n_2=2$) und Θ ($n_1=0$; $n_2=1$):

$$|E\rangle = \sum_s \int d\mathbf{k}_1 g_s(1) a^*(1) [\psi_V^* \int \varphi_1^s(2) a^*(2) d\mathbf{k}_2 + \psi_N^* \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \varphi_2^s(2, 3) a^*(2) a^*(3)] |0\rangle.$$

Die Entwicklungskoeffizienten sind $g_s(1)$, s bezeichnet die (diskreten und kontinuierlichen) Zustände des Sektors $N+2\Theta$ [Gl. (13)], über die hier summiert bzw. integriert wird. (Hierbei wird natürlich angenommen, daß so eine Entwicklung möglich ist, wir es also mit vollständigen Orthogonalsystemen zu tun haben.)

In dieser Darstellung hat dann die SCHRÖDINGER-Gleichung die allgemeine Form

$$(E - E_s - \omega_1) g_s(1) = \sum_{s'} \int d\mathbf{k}_2 U_{ss'}(1, 2) g_{s'}(2),$$

und daher

$$g_s(1) = \bar{A}_s \delta(E - E_s - \omega_1) + \bar{\Phi}_s(1)/(E - E_s - \omega_1).$$

Für jeden unphysikalischen Zustand $|\Phi_b\rangle$ läßt sich analog zu Gl. (23) die entsprechende einlaufende Amplitude \bar{A}_b so festlegen, daß $\bar{\Phi}_{(b)}(1) = 0$ für $\omega_1 = E - E^{(b)}$ ist. Durch \bar{A}_b ist dann $A(1)$ bestimmt.

Die Wechselwirkung (33) wird auch im Falle reeller, aber verschiedener Nullstellen der Funktion $h(z)$ [Gl. (15)] unphysikalische Zustände der Art liefern. Darauf läßt sich das BOGOLJUBOWSche Verfahren ähnlich anwenden wie hier.

Zusammenfassend kann man folgendes feststellen. Es ist uns gelungen, eine Wechselwirkung $V - \Theta$ anzugeben, die gebundene Zustände im Sektor $N+2\Theta$ erzeugt und, wie von DENNERY und KROLL²² vermu-

tet, eine Situation hervorbringt, die dem Fall von PAULI und KÄLLÉN entspricht. In diesem Falle können die Schwierigkeiten mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation nur nach dem von BOGOLJUBOW angegebenen Verfahren vermieden werden, das aber dann auch die diskreten Zustände als physikalische Zustände beseitigt. Es ist uns nicht gelungen, eine andere Wechselwirkung anzugeben, die auch „physi-

kalisch“ gebundene Zustände erzeugt. Wir konnten nicht entscheiden, ob dies an den speziellen untersuchten Ansätzen oder an allgemeinen Eigenschaften des LEE-Modells liegt.

Herrn Prof. W. HEISENBERG danke ich herzlich für zahlreiche anregende Diskussionen und Herrn Prof. L. BIERMANN für die Erlaubnis zur Benutzung der elektronischen Rechenmaschine G 2.

Zum Kontaktproblem an CdS-Einkristallen

Von K. W. BÖER * und K. LUBITZ

Aus dem IV. Physikalischen Institut der Humboldt-Universität Berlin
und dem Physikalisch-Technischen Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
(Z. Naturforsch. **17 a**, 397—405 [1962]; eingegangen am 8. Dezember 1961)

Herrn Prof. Dr. J. JAUMANN zum 60. Geburtstag gewidmet

Es werden Gold-, Indium-, Gallium-, Aluminium- und Kadmiumkontakte, die im Hochvakuum auf CdS-Einkristalle bei verschiedenen Temperaturen aufgedampft wurden, mit Hilfe von Potentialsondenabtastungen, Strom-Spannungscharakteristiken, elektro-optischen Effekten und Rauschmessungen untersucht. Die Herstellung von sperrsichtfreien, temperaturbeständigen Al-Kontakten wird beschrieben. Der Einfluß von Kristallinhomogenitäten wird diskutiert.

Aus dem meßbaren Strom sind Rückschlüsse auf die physikalisch interessante Leitfähigkeit nur dann möglich, wenn in dem zu untersuchenden Kristallteil die räumliche Verteilung von Feld- und Stromdichte bekannt ist. Durch geometrisch einfache Formgebung des Kristalls mit seinen Elektroden, durch Auswahl von Kristallen mit räumlich homogener Leitfähigkeit sowie durch Verwendung von sperrsichtfreien Kontakten kann dieses Problem auf ein einfaches geometrisches zurückgeführt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit soll der dritten Voraussetzung, der Erzeugung sperrsichtfreier Kontakte, das Hauptinteresse gewidmet sein. Der Einfluß, den Überschußrandschichten auf den Strom ausüben, kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden. Nur bei sehr kleinen Elektrodenabständen (an CdS weniger als 50 μ) kann dieser Einfluß bemerkbar werden, dann ist nämlich bereits ein beträchtlicher Bruchteil des Kristallgebietes zwischen den Elektroden Randschichtenbereich; die Elektronenkonzentration im Kristall wird dann also nicht allein durch die kristallinneren Erscheinungen bestimmt, sondern hängt zu einem wesentlichen Teil von den Kontakt-

bedingungen ab. Ist der Abstand zwischen den Elektroden jedoch größer, so kann der Einfluß dieses Gebietes erhöhter Leitfähigkeit gegenüber dem übrigen Kristallvolumen vernachlässigt werden (vgl. Anm. ¹).

Dagegen schaffen bekanntlich Verarmungsrand schichten vor den Elektroden hochohmige Bereiche, deren Widerstand von der angelegten Spannung ab hängt und die dadurch den Strom durch den Kristall in komplizierter Weise steuern. Bei sonst homogenen Kristallen ^{2, 3} gelingt es häufig, durch Anbringung zweier Potentialsonden die Leitfähigkeit aus dem fließenden Strom und der zwischen diesen Potentialsonden herrschenden Potentialdifferenz zu errechnen (vgl. Anm. ⁴).

Diese Potentialsondenmethode hat jedoch den Nachteil, daß sie bei der Untersuchung kinetischer Erscheinungen i. allg. versagt. Solange sich Raumladungen verändern, ist der Strom nicht divergenz frei; außerdem ist bei hochohmigen Kristallen die Zeitkonstante der Potentialsondenmeßanordnung meist erheblich größer als die der zu messenden Vorgänge. So ist man insbesondere bei der Messung

* Jetzt Department of Physics, New York University, New York.

¹ F. STÖCKMANN, Koll. inhomog. Felder fest. Dielektr., Abh. Dtsch. Akad. Wiss., Berlin 1960, S. 13.

² J. POPPE, Dissertation, Humboldt-Universität Berlin 1954; Arbeitstagung f. Festkörperphysik II (Dresden), Akademie-Verlag, Berlin 1954, S. 14.

³ R. W. SMITH, RCA-Rev. **12**, 350 [1951].

⁴ K. W. BÖER, Ann. Phys., Lpz. **10**, 20 [1952].